Brösel, Gerrit:

Transportprobleme

Zuerst erschienen in:
Logistik : Aufgaben und Lösungen / hrsg. von Heiko Burchert
München [u.a.]: Oldenbourg, 2000
ISBN 3-486-25483-9
S. 234-241

Logistik

Aufgaben und Lösungen

Herausgegeben von
Dipl.-Ing. oec. Dr. Heiko Burchert
PD Dr. Thomas Hering
Dipl.-Kfm. Dr. Roland Rollberg M. Sc.

mit Illustrationen von
Peter-Michael Glöckner

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Gerrit Brösel

Transportprobleme

Das saudische Unternehmen Bin Faisal Co. produziert in drei Orten (in Jeddah am Roten Meer, in Dammam am Arabischen Golf und in der Hauptstadt Riyadh) des Königreiches Saudi-Arabien Zement gleicher Art und Güte. Die Abnehmer dieses Zementes fragen in folgenden Orten nach: in der Hauptstadt Riyadh, in Abha im Asirgebirge, in der heiligen Stadt Medina und in der Industriestadt Jubail am Arabischen Golf. In der folgenden Transportmatrix sind in der rechten Spalte die Angebote der jeweiligen Produktionsstätten und in der unteren Zeile die Bedarfsmengen der Abnehmer erfaßt. Die Kosten je Mengeneinheit auf den zulässigen Transportwegen werden (linksbündig) in den Zellen der Matrix wiedergegeben.

nach von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*
Jeddah	6	6	3	11	*9*
Dammam	3	15	13	2	*9*
Riyadh	1	9	11	3	*2*
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*	***Σ 20***

Aufgabe

a) Definieren Sie das allgemeine klassische Transportproblem als Entscheidungsmodell!

b) Das Transportproblem der Bin Faisal Co. kann mit Hilfe der Simplex-Methode gelöst werden! Erstellen Sie hierzu das notwendige Ausgangstableau!

c) Die heuristischen Verfahren zur Lösung des klassischen Transportproblems lassen sich in die Eröffnungsverfahren und in die Verbesserungsverfahren unterteilen. Erläutern Sie kurz diese Unterteilung! Erörtern Sie die Vorgehensweise bei dem Nordwest-Ecken-Verfahren, der Matrix-Minimierungsmethode und dem Vogelschen Approximationsverfahren! Gehen Sie dabei auf die spezifischen Eigenschaften ein! Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Methoden jeweils die Ausgangslösung für das geschilderte Transportproblem!

d) Erläutern Sie das Stepping-Stone-Verfahren! Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Methode – ausgehend von der Ausgangslösung des Matrixminimierungsverfahrens – den optimalen Transportplan!

e) Die heilige Stadt Medina darf nur von Moslems betreten werden, das gilt auch für die Mitarbeiter des Unternehmens Bin Faisal Co. In Jeddah steht allerdings für den Transport des Zements kein entsprechender Mitarbeiter zur Verfügung. Wie kann die somit nicht zulässige Verbindung von Jeddah nach Medina im Ansatz gesperrt werden? Ermitteln Sie mit dem Vogelschen Approximationsverfahren eine Startlösung!

Lösung

a) Ausgangssituation: Das homogene Gut a wird in den Mengen a_i an den Orten $i = 1, 2, ..., n$ (Angebotsorte, Quellen) angeboten. Es wird in den Mengen b_j an verschiedenen Orten $j = 1, 2, ..., m$ (Nachfrageorte, Senken) benötigt. Das Gut wird von den Angebotsorten zu den Nachfrageorten transportiert, wobei die linear mengenabhängigen Transportkosten zwischen verschiedenen Orten unterschiedlich sein können. Zwischen den Orten i und j betragen die Transportkosten k_{ij} je Mengeneinheit.

Das Ziel ist die Minimierung der Transportkosten, wobei das Angebot der Quellen ausgeschöpft sowie die Nachfrage der Senken gedeckt werden soll. Gesucht sind die Mengeneinheiten x_{ij} (Entscheidungsvariablen), die von den jeweiligen Angebotsorten i zu den Nachfrageorten j transportiert werden sollen.

Die *Zielfunktion* lautet: $K = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij} \cdot x_{ij} \quad \rightarrow \quad$ Min. !

Nebenbedingungen:

(1) $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$ für alle $i = 1, 2, ..., n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$ für alle $j = 1, 2, ..., m$

(3) $x_{ij} \geq 0$ für alle $i = 1, 2, ..., n$ und alle $j = 1, 2, ..., m$.

Die Bestandsbedingung (1) sorgt für den Abtransport aller gelagerten Mengen. Durch die Bedarfsbedingung (2) wird die Deckung der Nachfrage gewährleistet. Annahmegemäß entspricht das Gesamtangebot dem Gesamtbedarf. Restriktion (3) ist die Nichtnegativitätsbedingung.

Die Zuordnung von Quellen und Senken ist beliebig möglich. Streckenspezifische Transportkapazitäten bestehen bei diesem einperiodigen Modell nicht.

b) *Zielfunktion*: Die Zielfunktion im konkreten Beispiel ergibt sich aus der Summe der mit den Transportkosten k_{ij} zwischen den Orten i und j multiplizierten Transportmengen x_{ij}. Diese Gesamtkosten K gilt es zu minimieren:

$$K = 6x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 11x_{14} + 3x_{21} + 15x_{22} + 13x_{23} + 2x_{24} + x_{31} + 9x_{32} + 11x_{33} + 3x_{34}$$

Nebenbedingungen: Aus den Quellen Jeddah, Dammam und Riyadh (q für Quelle) darf nicht mehr ausgeliefert werden, als vorhanden ist (Bestandsbedingungen):

Jeddah: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 9$

Dammam: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 9$

Riyadh (q): $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2$

Die Bedarfsdeckung in den Senken Riyadh (s für Senke), Abha, Medina und Jubail muß realisiert werden (Bedarfsbedingungen):

Riyadh (s): $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4$

Abha: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3$

Medina: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 8$

Jubail: $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5$

Gemäß Aufgabenstellung entspricht das Gesamtangebot dem Gesamtbedarf mit jeweils 20 Mengeneinheiten. Eine weitere Restriktion ist die Nichtnegativitätsbedingung $x_{ij} \geq 0$.

Als Ausgangstableau des Simplex-Algorithmus ergibt sich (ohne die Spalten der künstlichen Variablen):

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	RS
- K(Max)	6	6	3	11	3	15	13	2	1	9	11	3	0
Jeddah	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	9
Dammam	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	9
Riyadh (q)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
Riyadh (s)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	4
Abha	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	3
Medina	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	8
Jubail	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	5

Nachrichtlich: Nach Durchführung des Simplex-Algorithmus (nach elf Iterationsschritten) ergeben sich als Transportmengen der Optimallösung: $x_{12} = 1$, $x_{13} = 8$, $x_{21} = 4$, $x_{24} = 5$ und $x_{32} = 2$. Die minimalen Transportkosten betragen 70 Geldeinheiten (GE). Diese Lösung ist im folgenden Tableau abgebildet, wobei die rechtsbündigen Zahlen in den Zellen die Transportmenge angeben.

nach / von	Riyadh		Abha		Medina		Jubail		*Angebot*
Jeddah	6	0	6	1	3	8	11	0	*9*
Dammam	3	4	15	0	13	0	2	5	*9*
Riyadh	1	0	9	2	11	0	3	0	*2*
Nachfrage	*4*		*3*		*8*		*5*		*K = 70*

Die heute erhältliche Standardsoftware ist in der Lage, auch Transportprobleme größeren Umfangs auf der Basis der Linearen Optimierung zu lösen.

c) Transportprobleme sind in der Praxis meist sehr komplex und umfangreich. Um einen hohen Rechenaufwand zu vermeiden, wurden in der Vergangenheit heuristische Verfahren (Näherungsverfahren) entwickelt und eingesetzt. Mit Hilfe von Eröffnungsverfahren werden Ausgangslösungen geschaffen. Darauf aufbauend werden durch Verbesserungsverfahren mit wenigen Iterationsschritten Problemlösungen ermittelt, die der optimalen Lösung nahe kommen oder dieser entsprechen. Als Eröffnungsverfahren kommen dabei verschiedene Methoden zur Anwendung: zum Beispiel das Nordwest-Ecken-Verfahren, die Matrix-Minimummethode und das Vogelsche Approximationsverfahren. Das MODI-Verfahren und das Stepping-Stone-Verfahren sind mögliche Verbesserungsverfahren.

Eröffnungsverfahren:
Beim *Nordwest-Ecken-Verfahren* beginnt die Transportmengenzuordnung im Nordwesten: der linken oberen Ecke, im Beispiel also bei der Transportverbindung von Jeddah nach Riyadh. Hier wird unabhängig von den Transportkosten die maximal mögliche Transportmenge zugeordnet. Danach wird gleichermaßen mit der benachbarten Transportverbindung von Jeddah nach Abha (zeilenweises Vorgehen) bzw. mit der Verbindung von Dammam nach Riyadh (spaltenweises Vorgehen) verfahren. Ausgehend von der linken oberen Ecke wird sich zeilenweise oder spaltenweise bis zur rechten unteren Ecke, der Südostecke, vorgearbeitet. Die einfache Vorgehensweise des Nordwest-Ecken-Verfahrens ist matrixabhängig. Da die Transportkosten bei der Zuordnung unberücksichtigt bleiben, sind die ermittelten Ausgangslösungen meist mangelhaft und erfordern anschließend viele Schritte in den Verbesserungsverfahren.

Im Beispiel ergeben sich als Ausgangslösung folgende Transportmengen: $x_{11} = 4$, $x_{12} = 3$, $x_{13} = 2$, $x_{23} = 6$, $x_{24} = 3$ und $x_{34} = 2$. Die Gesamtkosten betragen 138 GE.

nach / von	Riyadh		Abha		Medina		Jubail		*Angebot*
Jeddah	6	4	6	3	3	2	11	0	*9*
Dammam	3	0	15	0	13	6	2	3	*9*
Riyadh	1	0	9	0	11	0	3	2	*2*
Nachfrage	*4*		*3*		*8*		*5*		*K = 138*

Die Transportkostenzuordnung beginnt beim *Matrixminimumverfahren* in dem Feld der Matrix, das die geringsten Transportkosten aufweist. Dort wird die maximal mögliche Transportmenge zugeteilt. Weiterhin wird jeweils dem transportkostengünstigsten Feld der Restmatrix die maximale Transportmenge zugeordnet. Die Methode zeichnet sich durch einen kostengünstigen Beginn aus, da die absoluten Kosten maßgeblich sind. Durch die Einschränkung des Freiheitsgrades werden jedoch zum Ende sehr ungünstige Zuteilungen getroffen.

Folgende Transportmengen ergeben sich im Beispiel als Ausgangslösung: $x_{12} = 1$, $x_{13} = 8$, $x_{21} = 2$, $x_{22} = 2$, $x_{24} = 5$ und $x_{31} = 2$. Der Zielfunktionswert beträgt 78 GE.

nach / von	Riyadh		Abha		Medina		Jubail		*Angebot*
Jeddah	6	0	6	1	3	8	11	0	*9*
Dammam	3	2	15	2	13	0	2	5	*9*
Riyadh	1	2	9	0	11	0	3	0	*2*
Nachfrage	*4*		*3*		*8*		*5*		*K = 78*

Das *Vogelsche Approximationsverfahren* ist aufwendiger als die bisher beschriebenen Verfahren. Zuerst werden die Kostendifferenzen KD zwischen dem günstigsten und dem zweitgünstigsten Feld der Matrix für jede Zeile und jede Spalte berechnet. Die Zuordnung beginnt dann im günstigsten Feld der Zeile oder Spalte, die die größte Differenz aufzeigt. Dieser Transportverbindung wird die maximal mögliche Transportmenge zugeteilt, da die Kostensteigerung besonders groß wäre, wenn statt dessen z. B. die zweitgünstigste Transportmöglichkeit dieser Zeile oder Spalte genutzt werden würde. Aus dem Tableau ergibt sich eine Restmatrix, in der Zeilen und Spalten, bei denen das Angebot erschöpft oder die Nachfrage befriedigt ist, nicht mehr in die Betrachtung einbezogen werden. Nun werden die Differenzen für die Restmatrix ermittelt und die Transportmengen fortlaufend gleichermaßen zugeordnet. Das Verfahren bezieht somit die Interdependenzen der Kostenstruktur in die Ausgangslösung ein und erreicht meist sehr gute Lösungen, die der optimalen Lösung nahe kommen oder, wie im vorliegenden Beispiel, sogar entsprechen.

Als Ausgangslösung ergeben sich mit diesem Verfahren folgende Transportmengen: $x_{12} = 1$, $x_{13} = 8$, $x_{21} = 4$, $x_{24} = 5$ und $x_{31} = 2$. Der Zielfunktionswert beträgt 70 GE.

nach / von	Riyadh		Abha		Medina		Jubail		*Angebot*	KD
Jeddah	6		6		3	**8**	11		*9*	3
Dammam	3		15		13		2		*9*	1
Riyadh	1		9		11		3		*2*	2
Nachfrage	*4*		*3*		*8*		*5*			
KD	2		3		**8**		1			

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*	KD
Jeddah	6	6 **1**	3 8	11	*9*	0
Dammam	3	15	13 0	2	*9*	1
Riyadh	1	9	11 0	3	*2*	2
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*		
KD	2	**3**	-	1		

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*	KD
Jeddah	6 0	6 1	3 8	11 0	*9*	-
Dammam	3	15	13 0	2	*9*	1
Riyadh	1	9 **2**	11 0	3	*2*	2
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*		
KD	2	**6**	-	1		

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*
Jeddah	6 0	6 1	3 8	11 0	*9*
Dammam	3 4	15 0	13 0	2 5	*9*
Riyadh	1 0	9 2	11 0	3 0	*2*
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*	*K = 70*

d) Das Stepping-Stone-Verfahren zählt zu den Verbesserungsverfahren und liefert auf der Grundlage einer Startlösung nach endlich vielen Interationsschritten die optimale Lösung des Transportproblems. Gegeben ist im Beispiel die mit dem Matrixminimumverfahren ermittelte Start- oder auch Basislösung:

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*
Jeddah	6 0	6 1	3 8	11 0	*9*
Dammam	3 2	15 2	13 0	2 5	*9*
Riyadh	1 2	9 0	11 0	3 0	*2*
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*	*K = 78*

Im Rahmen des Stepping-Stone-Verfahrens werden die Grenzkosten für Transportstrecken ermittelt, die in der vorgegebenen Basislösung bisher nicht berücksichtigt wurden. Die Grenzkosten besagen, um wieviel sich die Gesamtkosten ändern, wenn – unter Einhaltung der Restriktionen – auf bislang unberücksichtigten Transportstrekken eine Mengeneinheit transportiert wird. Zur Bestimmung der Grenzkosten der sogenannten Nichtbasisvariable muß der gegebene Transportplan so verändert werden, daß wiederum ein zulässiger Transportplan gebildet wird.

Beispiel: Für die Ermittlung der Grenzkosten der Transportstrecke von Riyadh nach Abha (x_{32}) muß vom Angebotsort Dammam eine Mengeneinheit weniger nach Abha transportiert werden. Diese wird nunmehr von Dammam nach Riyadh geliefert. Damit der Abnehmer in Riyadh nicht zuviel erhält, wird die Transportmenge innerhalb der saudischen Hauptstadt um eine Mengeneinheit verringert, welche nun wiederum durch die Bin Faisal Co. von Riyadh nach Abha transportiert werden kann (siehe hierzu die geschilderte Transportmengenveränderung in nachfolgender Abbildung). Die Grenzkosten werden unter Zuhilfenahme der streckenspezifischen Transportkosten bestimmt: $-15+3-1+9=-4$. Die Variable x_{32} hat bei gegebener Basislösung einen Grenzkostensatz in Höhe von –4 Geldeinheiten je Mengeneinheit.

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*
Jeddah					*9*
Dammam	+ 1	– 1			*9*
Riyadh	– 1	+ 1			*2*
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*	

Analog werden mit Hilfe dieser Schleifen die Grenzkosten für alle weiteren Nichtbasisvariablen bestimmt. Die ermittelten Grenzkostensätze sind in folgender Abbildung dargestellt:

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*
Jeddah	6 + 8 0	6 1	3 8	11 + 18 0	*9*
Dammam	3 2	15 2	13 + 1 0	2 5	*9*
Riyadh	1 2	9 – 4 0	11 + 13 0	3 + 3 0	*2*
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*	*K = 78*

Diese Grenzkostensätze ergeben sich aus folgenden Schleifen:

$\mathbf{x_{11}}$:	x_{31}	x_{32}	x_{12}	x_{11}	
	-1	$+9$	-6	$+6$	$=+8$
$\mathbf{x_{23}}$:	x_{13}	x_{12}	x_{22}	x_{23}	
	-3	$+6$	-15	$+13$	$=+1$
$\mathbf{x_{33}}$:	x_{13}	x_{11}	x_{31}	x_{33}	
	-3	$+6$	-1	$+11$	$=+13$
$\mathbf{x_{14}}$:	x_{24}	x_{22}	x_{12}	x_{14}	
	-2	$+15$	-6	$+11$	$=+18$
$\mathbf{x_{32}}$:	x_{22}	x_{21}	x_{31}	x_{32}	
	-15	$+3$	-1	$+9$	$=-4$
$\mathbf{x_{34}}$:	x_{24}	x_{21}	x_{31}	x_{34}	
	-2	$+3$	-1	$+3$	$=+3$

Solange es Nichtbasisvariable mit negativen Grenzkostensätzen gibt, können die Gesamtkosten der vorliegenden Basislösung verringert werden. Die Grenzkosten der Variable x_{32} geben z. B. an, daß sich die Kosten um 4 Geldeinheiten verringern, wenn eine Mengeneinheit von Riyadh nach Abha geschickt wird. Die Transportmenge wird durch die gegebenen Transportmengen der dazugehörigen Schleife bestimmt. Um keine Restriktion zu verletzen, kann die Transportmenge der Nichtbasisvariable nur so weit erhöht werden, bis eine der bisherigen Basisvariablen aus dem Transportplan verdrängt ist. Da die entsprechenden Basisvariablen (x_{22}, x_{31}) jeweils zwei Mengeneinheiten aufweisen, entspricht die maximale mögliche Erhöhung der

Transportmenge der Nichtbasisvariable x_{32} im vorliegenden Fall zwei Mengeneinheiten.

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*
Jeddah	6 +8 0	6 1	3 8	11 +18 0	*9*
Dammam	3 2	15 2	13 +1 0	2 5	*9*
Riyadh	1 2	9 −4 0	11 +13 0	3 +3 0	*2*
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*	*K = 78*

Folgende Abbildung zeigt den verbesserten Transportplan nach dem ersten Schritt des Stepping-Stone-Verfahrens sowie die anschließend ermittelten Grenzkostensätze. Der Zielfunktionswert beträgt nunmehr 70 GE. Die Transportkosten können nicht weiter verringert werden, da jetzt alle Grenzkostensätze ≥ 0 sind. Der optimale Transportplan ist gefunden.

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*
Jeddah	6 +12 0	6 1	3 8	11 +18 0	*9*
Dammam	3 4	15 +4	13 +13 0	2 5	*9*
Riyadh	1 +4 0	9 2	11 +5 0	3 +7 0	*2*
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*	*K = 70*

e) Der nicht zulässigen Verbindung von Jeddah nach Medina kann im Tableau der Kostenkoeffizient $k_{13} = \infty$ zugeteilt werden. Mit dem Vogelschen Approximationsverfahren ergibt sich folgende Startlösung, die nach Überprüfung durch die Simplex-Methode auch der Optimallösung entspricht:

nach / von	Riyadh	Abha	Medina	Jubail	*Angebot*
Jeddah	6 4	6 3	∞ 0	11 2	*9*
Dammam	3 0	15 0	13 6	2 3	*9*
Riyadh	1 0	9 0	11 2	3 0	*2*
Nachfrage	*4*	*3*	*8*	*5*	*K = 170*

Literaturhinweise

DOMSCHKE, W./DREXL, A.: Einführung in Operations Research, 2. Aufl., Berlin u. a. 1991.

GÜNTHER, H.-O./TEMPELMEIER, H.: Produktion und Logistik, 2. Aufl., Berlin u. a. 1995.

HILLIER, F. S./LIEBERMAN, G. J.: Operations Research, 5. Aufl., München, Wien 1997.

MÜLLER-MERBACH, H.: Operations Research, 3. Aufl., München 1973.

WITTE, TH./DEPPE, J. F./BORN, A.: Lineare Programmierung, Wiesbaden 1975.